5.4 GNUPLOT による関数表示いろいろ

まだまだいろいろな使い方が可能です。デモが /usr/lib/gnuplot/demos にありますから、覗いてみるといいでしょう。全てのデモを見たいなら

```
cd /usr/lib/gnuplot/demos; gnuplot all.dem; cd
```

としてみましょう。

5.4.1 媒介変数表示 - set parametric -

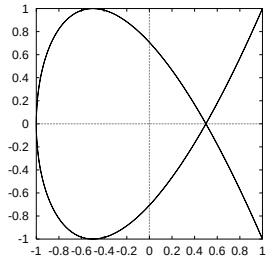
関数関係を $y = f(x), z = g(x, y)$ のように表すことができない場合でも、媒介変数を用いて、2 次元では $y = y(t), x = x(t)$ の形で、3 次元では $x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v)$ の形で表すことが可能となる場合があります。最も簡単な例は円や球の表示でしょう。

媒介変数の例：円や球の表示

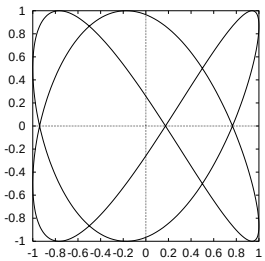
```
gnuplot> set parametric
gnuplot> set size 0.721,1.0
gnuplot> plot [-pi:pi] cos(t), sin(t)
gnuplot> set view ,,,2
gnuplot> set urange[0:pi]
gnuplot> set vrange[0:2*pi]
gnuplot> set isosample 40
gnuplot> splot sin(u)*cos(v), sin(u)*sin(v), cos(u)
```

物理の教科書にあるリサージュ(Lissajous) 図形を描いてみましょう。一般形は $x = A\cos(\omega_1 t + \alpha),\ y = B\sin(\omega_2 t + \beta)$ です。以下に示すのは物理の教科書にある $A = B,\ \omega_1 : \omega_2 = 2 : 3, \alpha = 0$ の場合で、位相差$\beta - \alpha$ を変化させています。

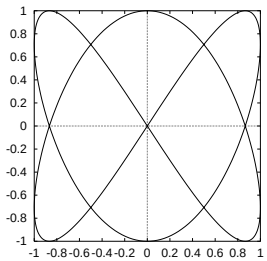
$\beta = 0$



$\beta = \frac{\pi}{6}$



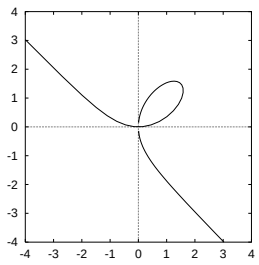
$\beta = \frac{\pi}{4}$



もっといろいろな例を挙げましょう。岩波全書の”数学公式 I”に載っているものです。

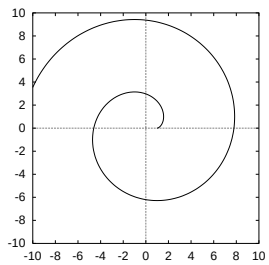
デカルトの葉形
(Folium of Descartes)

$$x = \frac{3at}{1+t^3} \quad y = \frac{3at^2}{1+t^3}$$



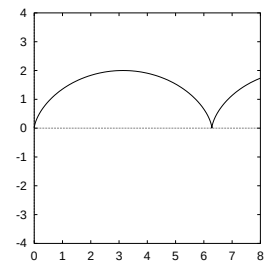
円周の伸開線
(involute)

$$x = a(\cos\theta + \theta\sin\theta)$$
$$y = a(\sin\theta - \theta\cos\theta)$$



サイクロイド
(cycroid)

$$x = a(\theta - \sin\theta)$$
$$y = a(1 - \cos\theta)$$



5.4.2 極座標表示 - set polar -

2 次元極座標では原点からの距離 r と偏角 θ の間の関数関係式：$r = f(\theta)$ で図形を表示します。半径 R の円は非常に簡単に $r = R$ と表されます。ただし、GNUPLOT では偏角の変数名は x なので間違えないでください。

```
set term tgif
set output 'sin2x.obj'
set polar
set size 0.721, 0.615
set noborder
set noxtics
set noytics
plot sin(2*x)
```

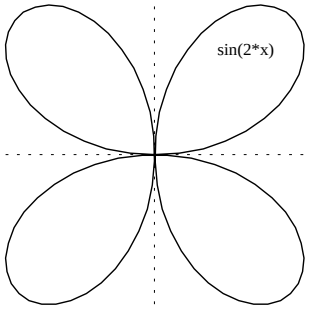
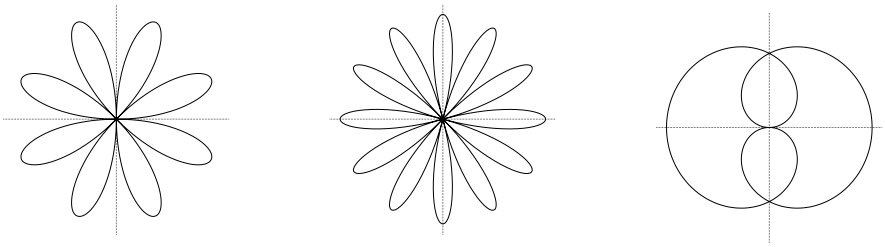


図 36 極座標表示：$r(\theta) = \sin 2\theta$ のスクリプトとグラフ

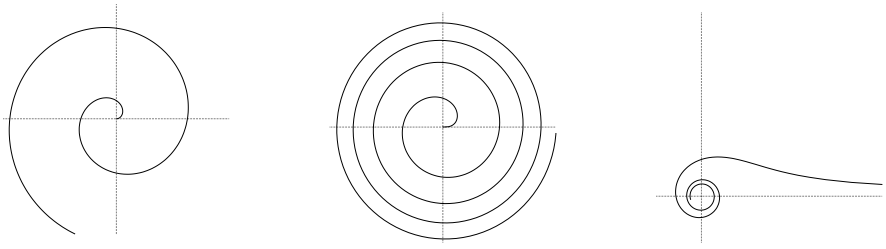
”数学公式 I”に載っているものを描いてみましょう。まずは、上記の”四葉”のように一般形式 $r = a \sin n\theta \ (a > 0)$ と書かれる”正葉線”です。

$n = 4$ $n = 6$ $n = \frac{1}{2}$



代数螺線 $r = a\theta^n$ です。

$n = 1$ $n = \frac{1}{2}$ $n = -\frac{1}{2}$



5.4.3 複素数の扱い

複素定数は { 実部 (定数), 虚部 (定数)} の形式で表されます。括弧の中に変数を入れることができません。複素変数は、まず虚数単位を i={0,1} と定義してから、$x + i * y$ のように表記します。

複素数に関する重要な公式、Euler の公式を表現できるかどうか確かめましょう。

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

このように扱えるかどうかは、以下の関数が正常に表示できるかどうかで検証できます。

$$\Re\{e^{i\theta}\} = \cos\theta,\ \Im\{e^{i\theta}\} = \sin\theta$$

以下のように対話的に実行して、cos, sin 曲線が現れること確認してください。

GNUPLOT での複素数の扱い：Euler 公式の表示

```
gnuplot> i={0,1.0}
gnuplot> plot [0:2*pi] real(exp(i*x)), imag(exp(i*x))
```

もう少し凝った問題を考えましょう。振動理論では解を複素数のまま扱い、実部もしくは虚部を解として採用すると決めておくと、計算が非常に楽になります。質点の減衰振動の一般解は

$$X(t) = Ce^{(-\lambda + i\sqrt{\omega^2 - \lambda^2})t}$$

と書き表されますが、これをそのままグラフに描いて見ましょう。次のスクリプトを書いて GNUPLOT に非対話モード で実行させましょう。

```
i={0.0,1.0}
w=50.0
lmd=10.0
wl=sqrt(w**2-lmd**2)
plot [0:0.5] real(exp((-lmd+i*wl)*x)), \
             real(i*exp((-lmd+i*wl)*x)), \
             real((i+1)/sqrt(2)*exp((-lmd+i*wl)*x))
pause -1
```

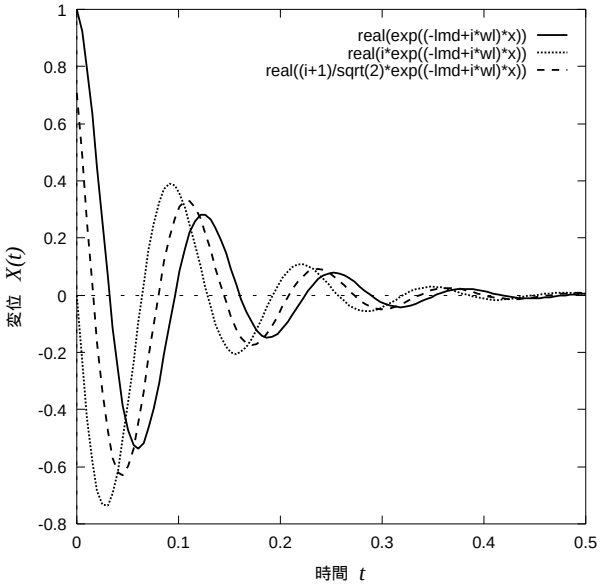


図 37　減衰振動問題の複素解表示

どうです、減衰振動を表していますね。しかも、複素定数を変えることで様子が変わっていくことが判ります。もちろん実際には初期条件に合致するように、複素定数を決めます。

5.4.4 3 次元プロットの等高線図 - set contour -

splot では、地図のように等高線を描くことができます。電磁気学で習う 2 つの点電荷による電場の等電位線図を描いてみましょう。

```
set nokey
set view 0, 0, 1, 1
set samples 100, 100
set isosamples 60, 60
set nosurface
set contour base
set cntrparam bspline
set cntrparam order 5
set cntrparam points 7
set size 1,1.05
set xrange [-5 : 5]
set yrange [-5 : 5]
set output 'potent1.obj'
set cntrparam levels discrete 0.4,0.5,0.6,0.7,0.8,0.9,1.0,1.2,1.6,3.2
splot 1.0/sqrt((x-2.0)**2+y**2)+1.0/sqrt((x+2.0)**2+y**2)
set output 'potent2.obj'
set cntrparam levels discrete -3.2,-1.6,-0.8,-0.4,-0.2,-0.1,-0.05,0,\
                              0.05,0.1,0.2,0.4,0.8,1.6,3.2
splot 1.0/sqrt((x-2.0)**2+y**2)-1.0/sqrt((x+2.0)**2+y**2)
```

必要な設定は "**set contour**" です。この例題では表面形状は描かないので "**set nosurface**" とします。また、等高線を引く高さは "**set cntparam ...** " で設定します。滑らかな曲線を得るために、bspline 関数を使用してます。

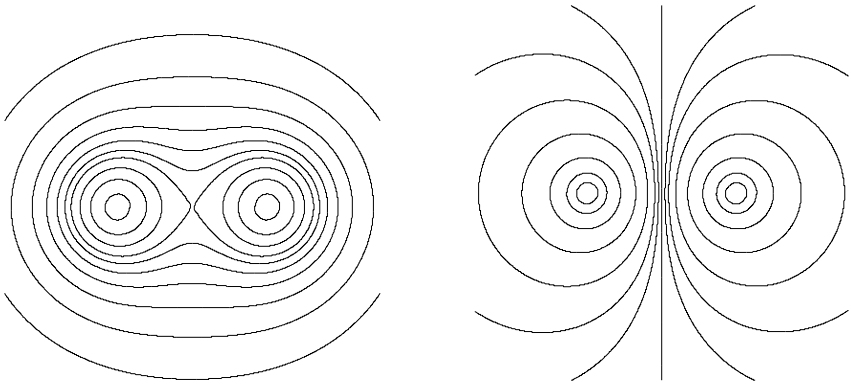


図 38　大きさが等しい 2 つの電荷による電場の等電位線図

宿題　次のような実験報告書を LaTeX+tgif+GNUPLOT を使って作成しなさい (図や式の番号は見本と違って 1 から始まってもよい)。

ケーターの振り子の理論解析

自分の学籍番号と名前

慣性モーメントと重心の位置

ケーターの可逆振り子の実験において、図のように振り子本体の質量を M、支点間距離を l_0、支点 O と重心 $\mathrm{G_M}$の距離を h_0、$\mathrm{G_M}$のまわりの慣性モーメントを $I_{\mathrm{G_M}}$ とし、また可動子 CC' の質量を m、支点 O からの距離を x とすると、支点 O および O' のまわりの振り子の合成慣性モーメント $I_O, I_{O'}$ は、可逆子を質点と見なした場合、それぞれ

$$I_O = I_{\mathrm{G_M}} + Mh_0^2 + mx^2 \qquad I_{O'} = I_{\mathrm{G_M}} + M(l_0 - h_0)^2 + m(l_0 - x)^2 \tag{7}$$

と表される。また、振り子 (可動子 CC' を含む) の重心の位置は CC' の位置の関数として

$$h(x) = \frac{Mh_0 + mx}{M + m} \qquad h'(x) = l_0 - h(x) = \frac{M(l_0 - h_0) + m(l_0 - x)}{M + m} \tag{8}$$

と与えられる。これらの式を基にして正立時と倒立時の振り子の周期を求め実験と対比してみる。

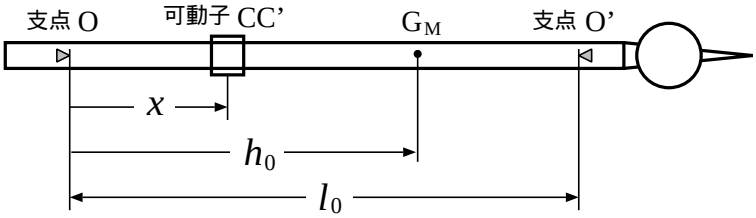


図 39　ケーターの可逆振り子の模式図

周期の解析式とその図示

まず、支点 O のまわりで微小振動させた場合の周期 $\mathcal{T}(x)$、支点 O' のまわりで微小振動させた場合の周期 $\mathcal{T}'(x)$ は

$$\mathcal{T}(x) = 2\pi\sqrt{\frac{I_O}{(M+m)gh(x)}} \qquad \mathcal{T}'(x) = 2\pi\sqrt{\frac{I'_O}{(M+m)gh'(x)}} \tag{9}$$

である。ここで、$M/m = 20.000$, $h_0 = 0.65000$ [m], $I_{\mathrm{G_M}}/m = 4.7500$ [m^2], $l_0 = 1.0000$ [m], $g = 9.8000$ [m/s^2] である場合の $\mathcal{T}(x)$ と $\mathcal{T}'(x)$ を図に示す。

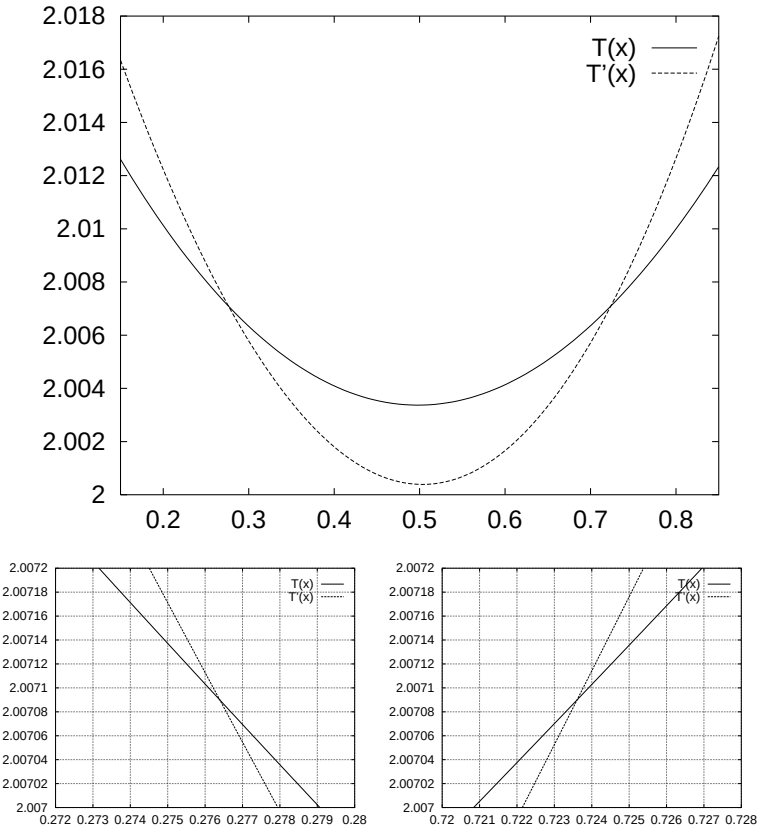


図 40　可動子 CC' の位置と振り子の周期 T と T' の関係

実験で得られる曲線に類似の曲線となり、解析式として正しいことが理解できる。さて、M と m は正確に測定可能であるが、l_0 と h_0 と g が未知 (しかしおおよその値は知れている) な値である。解析式が既知な場合には、実験データとの差異が最も小さくなるよう、解析式に含まれるパラメータ (未知量) を推定する計算プログラム (行列計算) を組むことは難しくない。が、後の検討課題とする。

ヒント　今まで学習してきた LaTeX+tgif+GNUPLOT の使い方の範囲でじゅうぶん作成可能です。式には equation 環境がよいでしょう。見出しは、番号の自動割り当てをしない (*が付く) セクション型コマンド

```
\subsection*{ 見出し内容 }
```

を使うといいでしょう。