

# テーパー管の分子流コンダクタンス の数値解析

東京電機大学工学部  
松田七美男，井上竜ノ介

2007年11月14日

# 研究目的

## ❖ 研究目的

- ❖ テーパー管の形状
- ❖ 座標軸と模式図
- ❖ 微小面要素
- ❖ 積分方程式
- ❖ 具体的な関数
- ❖ 核  $G(\xi, x)$
- ❖ 数値ライブラリ
- ❖ 解  $q(x)$  の様子
- ❖ 解  $q(x)$  の様子
- ❖ 通過確率  $K$
- ❖ 結果の比較
- ❖ まとめ
- ❖ Knudsen 積分公式による近似式
- ❖ 近似式のパラメータ依存性
- ❖ 近似式と数値計算結果の比較

- テーパー管の分子流コンダクタンス  $C$  の正確な値を**数値計算**により求める．開孔コンダクタンスを  $C_0$  , 通過確率を  $K$  として ,

$$C = KC_0 \quad (1)$$

# 研究目的

## ❖ 研究目的

- ❖ テーパー管の形状
- ❖ 座標軸と模式図
- ❖ 微小面要素
- ❖ 積分方程式
- ❖ 具体的な関数
- ❖ 核  $G(\xi, x)$
- ❖ 数値ライブラリ
- ❖ 解  $q(x)$  の様子
- ❖ 解  $q(x)$  の様子
- ❖ 通過確率  $K$
- ❖ 結果の比較
- ❖ まとめ
- ❖ Knudsen 積分公式による近似式
- ❖ 近似式のパラメータ依存性
- ❖ 近似式と数値計算結果の比較

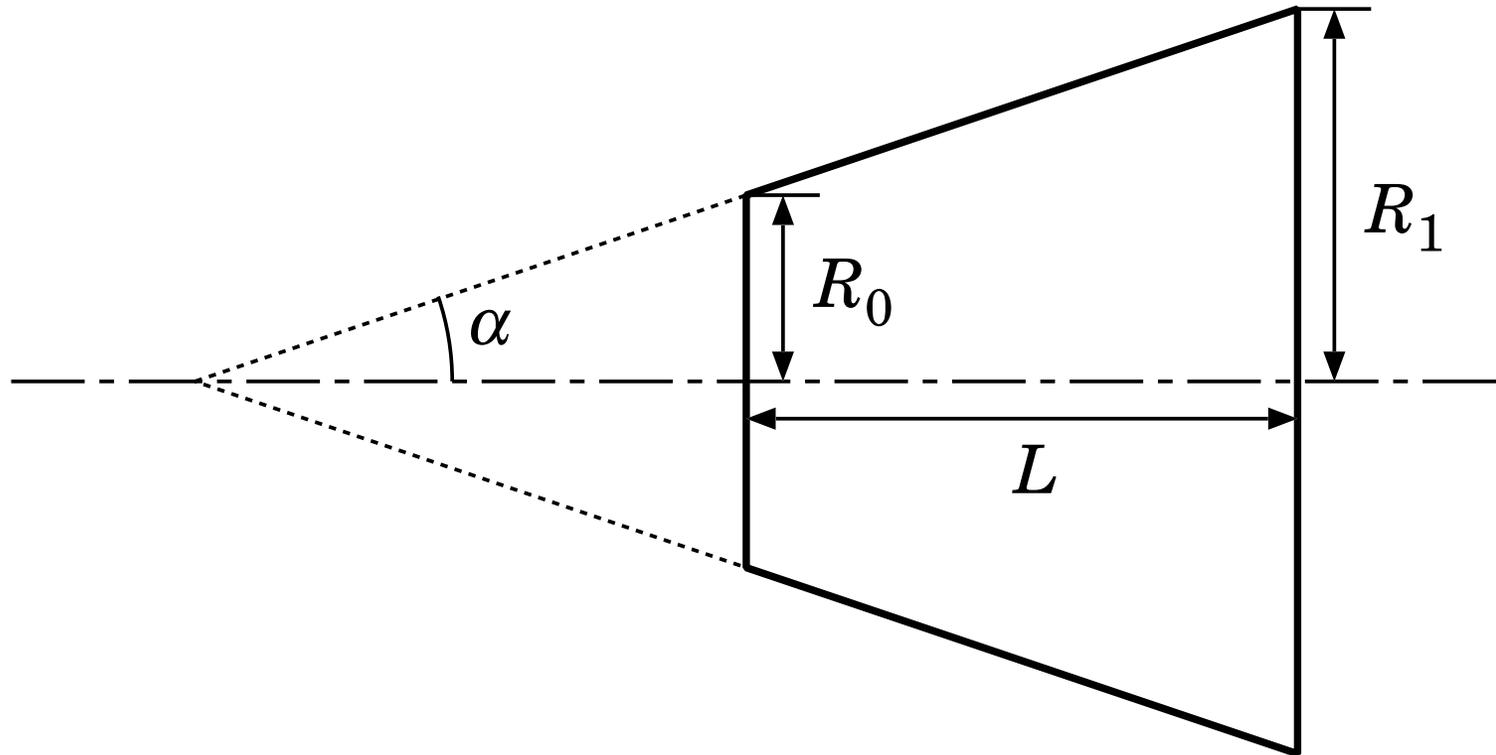
- テーパー管の分子流コンダクタンス  $C$  の正確な値を**数値計算**により求める．開孔コンダクタンスを  $C_0$  , 通過確率を  $K$  として ,

$$C = KC_0 \quad (1)$$

- **数値計算は , モンテカルロシミュレーション法と積分方程式法により行い , 相互に比較する .**

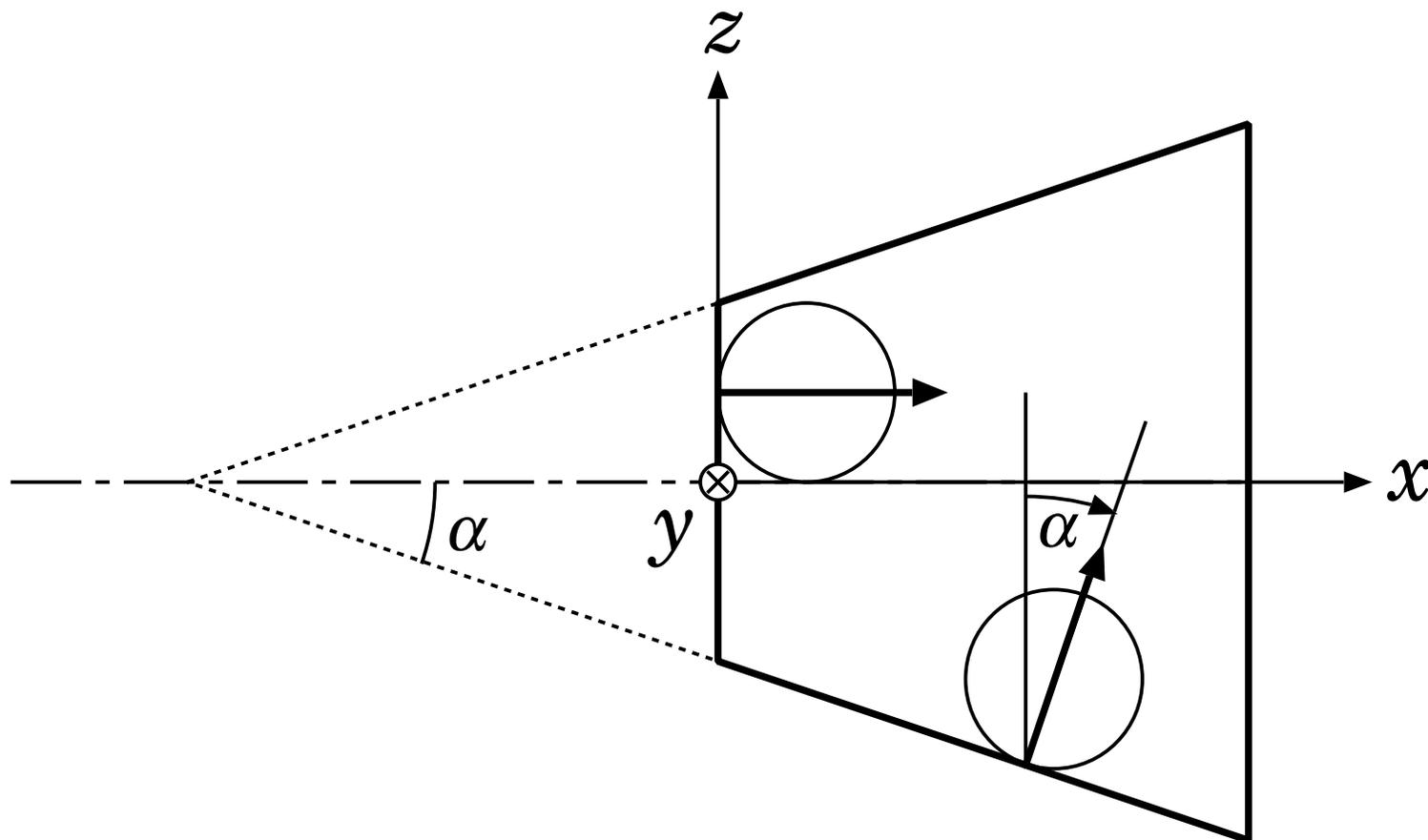
# テーパー管の形状定義

- ❖ 研究目的
- ❖ **テーパー管の形状**
- ❖ 座標軸と模式図
- ❖ 微小面要素
- ❖ 積分方程式
- ❖ 具体的な関数
- ❖ 核  $G(\xi, x)$
- ❖ 数値ライブラリ
- ❖ 解  $q(x)$  の様子
- ❖ 解  $q(x)$  の様子
- ❖ 通過確率  $K$
- ❖ 結果の比較
- ❖ まとめ
- ❖ Knudsen 積分公式による近似式
- ❖ 近似式のパラメータ依存性
- ❖ 近似式と数値計算結果の比較



# 座標軸と模式図

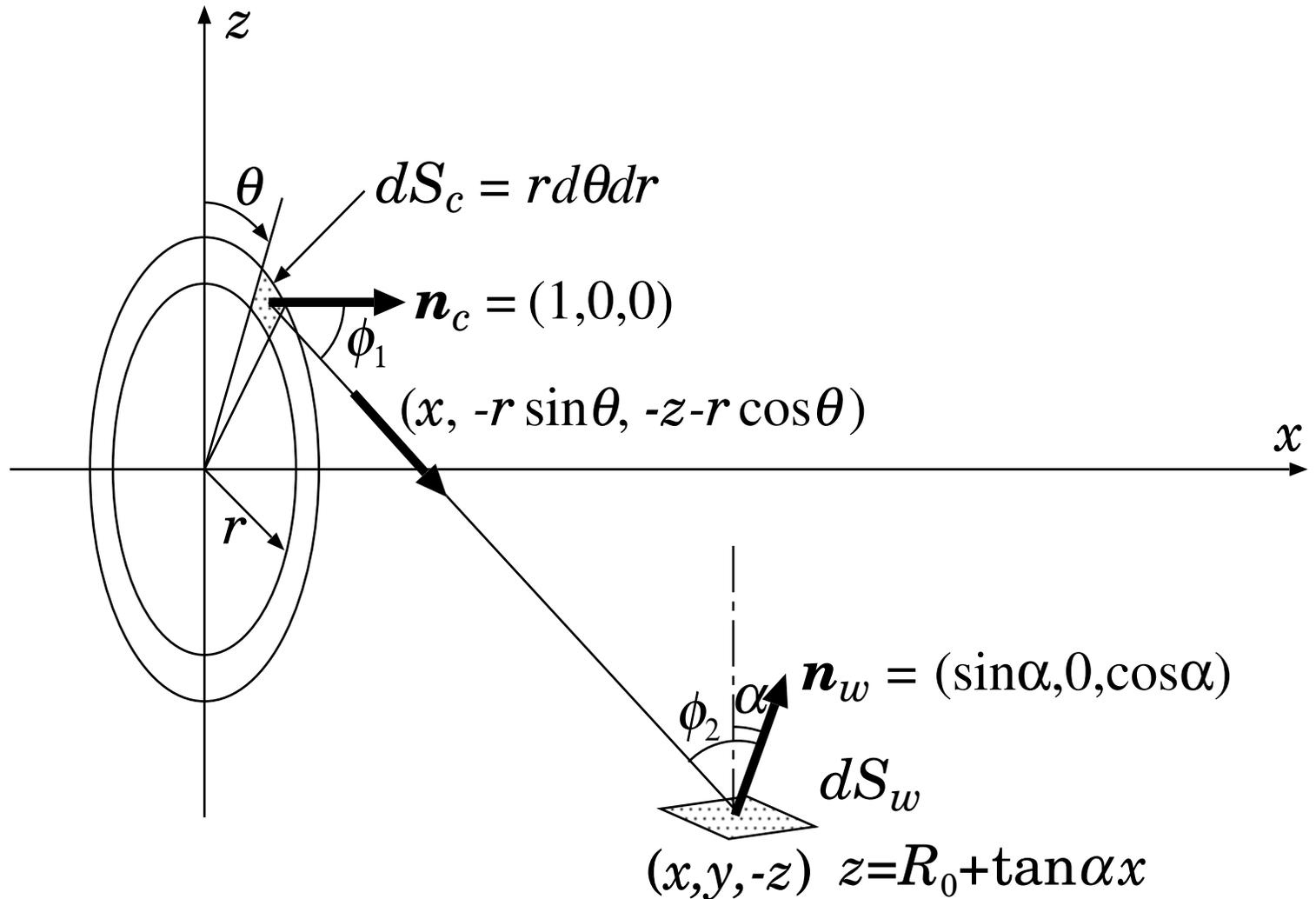
- ❖ 研究目的
- ❖ テーパー管の形状
- ❖ 座標軸と模式図
- ❖ 微小面要素
- ❖ 積分方程式
- ❖ 具体的な関数
- ❖ 核  $G(\xi, x)$
- ❖ 数値ライブラリ
- ❖ 解  $q(x)$  の様子
- ❖ 解  $q(x)$  の様子
- ❖ 通過確率  $K$
- ❖ 結果の比較
- ❖ まとめ
- ❖ Knudsen 積分公式による近似式
- ❖ 近似式のパラメータ依存性
- ❖ 近似式と数値計算結果の比較



余弦則

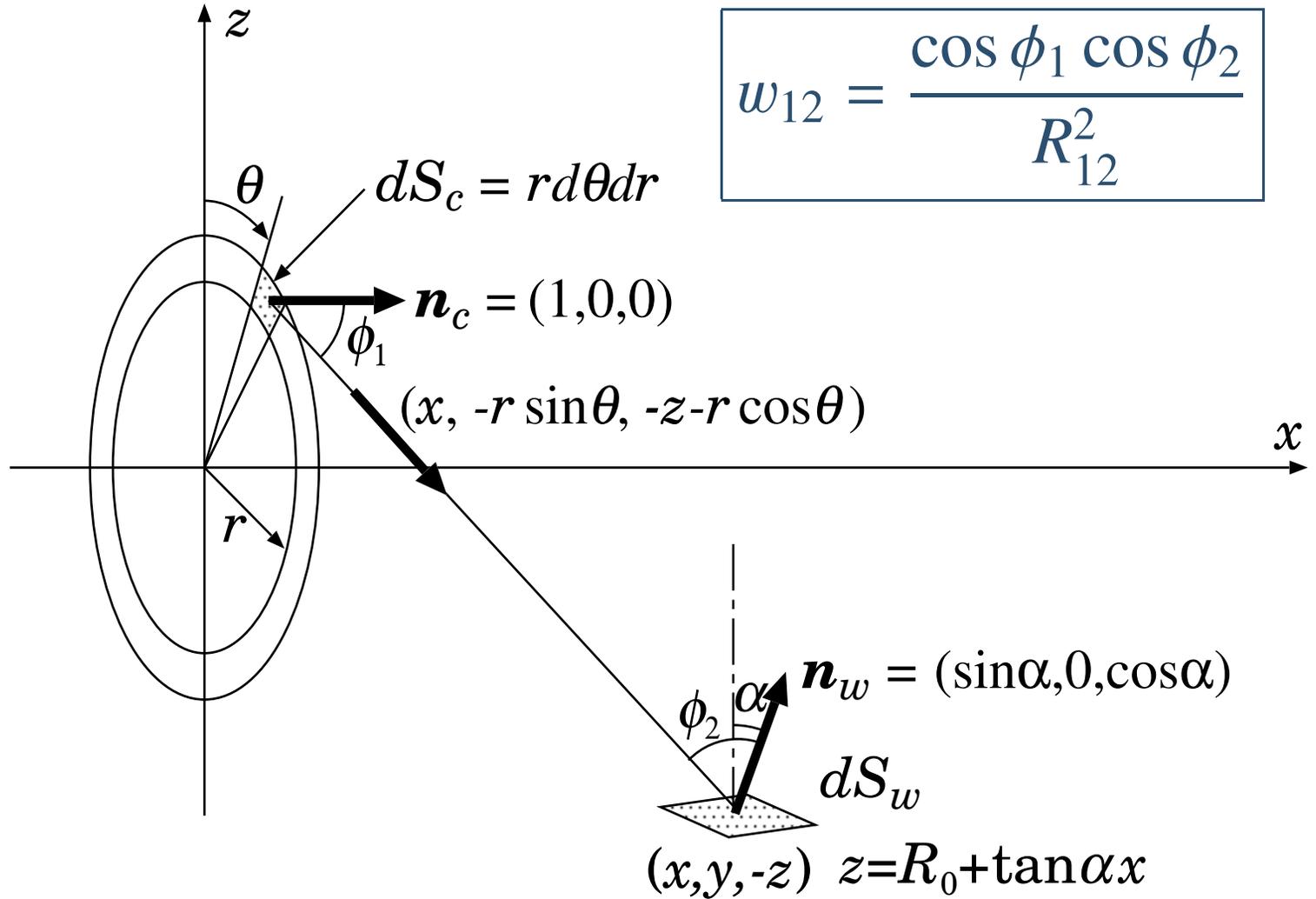
# 壁や開口部の微小面要素

- ❖ 研究目的
- ❖ テーパー管の形状
- ❖ 座標軸と模式図
- ❖ 微小面要素
- ❖ 積分方程式
- ❖ 具体的な関数
- ❖ 核  $G(\xi, x)$
- ❖ 数値ライブラリ
- ❖ 解  $q(x)$  の様子
- ❖ 解  $q(x)$  の様子
- ❖ 通過確率  $K$
- ❖ 結果の比較
- ❖ まとめ
- ❖ Knudsen 積分公式による近似式
- ❖ 近似式のパラメータ依存性
- ❖ 近似式と数値計算結果の比較



# 壁や開口部の微小面要素

- ❖ 研究目的
- ❖ テーパー管の形状
- ❖ 座標軸と模式図
- ❖ 微小面要素
- ❖ 積分方程式
- ❖ 具体的な関数
- ❖ 核  $G(\xi, x)$
- ❖ 数値ライブラリ
- ❖ 解  $q(x)$  の様子
- ❖ 解  $q(x)$  の様子
- ❖ 通過確率  $K$
- ❖ 結果の比較
- ❖ まとめ
- ❖ Knudsen 積分公式による近似式
- ❖ 近似式のパラメータ依存性
- ❖ 近似式と数値計算結果の比較



# Clausingの積分方程式

## 定常状態におけるガス放出速度

## $q(x)$ (=入射頻度) について

- ❖ 研究目的
- ❖ テーパー管の形状
- ❖ 座標軸と模式図
- ❖ 微小面要素
- ❖ 積分方程式
- ❖ 具体的な関数
- ❖ 核  $G(\xi, x)$
- ❖ 数値ライブラリ
- ❖ 解  $q(x)$  の様子
- ❖ 解  $q(x)$  の様子
- ❖ 通過確率  $K$
- ❖ 結果の比較
- ❖ まとめ
- ❖ Knudsen 積分公式による近似式
- ❖ 近似式のパラメータ依存性
- ❖ 近似式と数値計算結果の比較

$$q(x) = \Gamma^{(\alpha)}(R_0, x) + \int_0^L q(\xi) G^{(\alpha)}(\xi, x) d\xi \quad (2)$$

$\Gamma^{(\alpha)}(R_0, x)$  : 開口端から円錐台上の微小面

$G^{(\alpha)}(\xi, x)$  : 円錐台から円錐台上の微小面

# 具体的な関数

- ❖ 研究目的
- ❖ テーパー管の形状
- ❖ 座標軸と模式図
- ❖ 微小面要素
- ❖ 積分方程式
- ❖ 具体的な関数
- ❖ 核  $G(\xi, x)$
- ❖ 数値ライブラリ
- ❖ 解  $q(x)$  の様子
- ❖ 解  $q(x)$  の様子
- ❖ 通過確率  $K$
- ❖ 結果の比較
- ❖ まとめ
- ❖ Knudsen 積分公式による近似式
- ❖ 近似式のパラメータ依存性
- ❖ 近似式と数値計算結果の比較

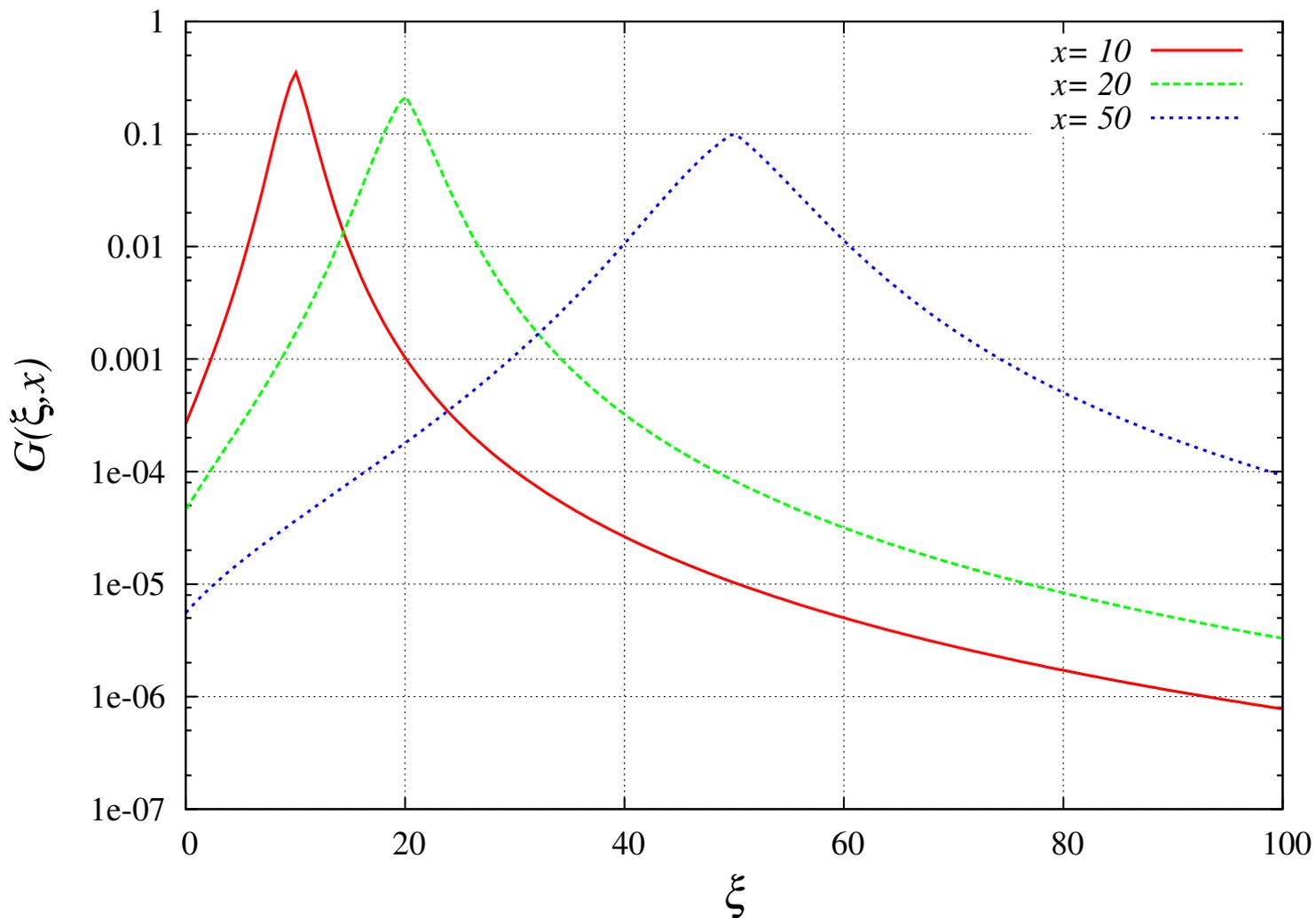
$$\Gamma^{(\alpha)}(R_0, x) = \frac{1}{2R_x \cos \alpha} \left[ \frac{R_0(3R_x - R_0) \cos^2 \alpha + x^2}{\sqrt{4R_0R_x \cos^2 \alpha + x^2}} - R_0 \sin \alpha \cos \alpha - x \right] \quad (3)$$

$$G^{(\alpha)}(\xi, x) d\xi = \frac{\cos \alpha}{2R_x} \left[ 1 - \frac{|u| (u^2 + 6R_x R_\xi \cos^2 \alpha)}{(u^2 + 4R_x R_\xi \cos^2 \alpha)^{3/2}} \right] d\xi \quad (4)$$

$$u = x - \xi, R_x = R_0 + x \tan \alpha, R_\xi = R_0 + \xi \tan \alpha$$

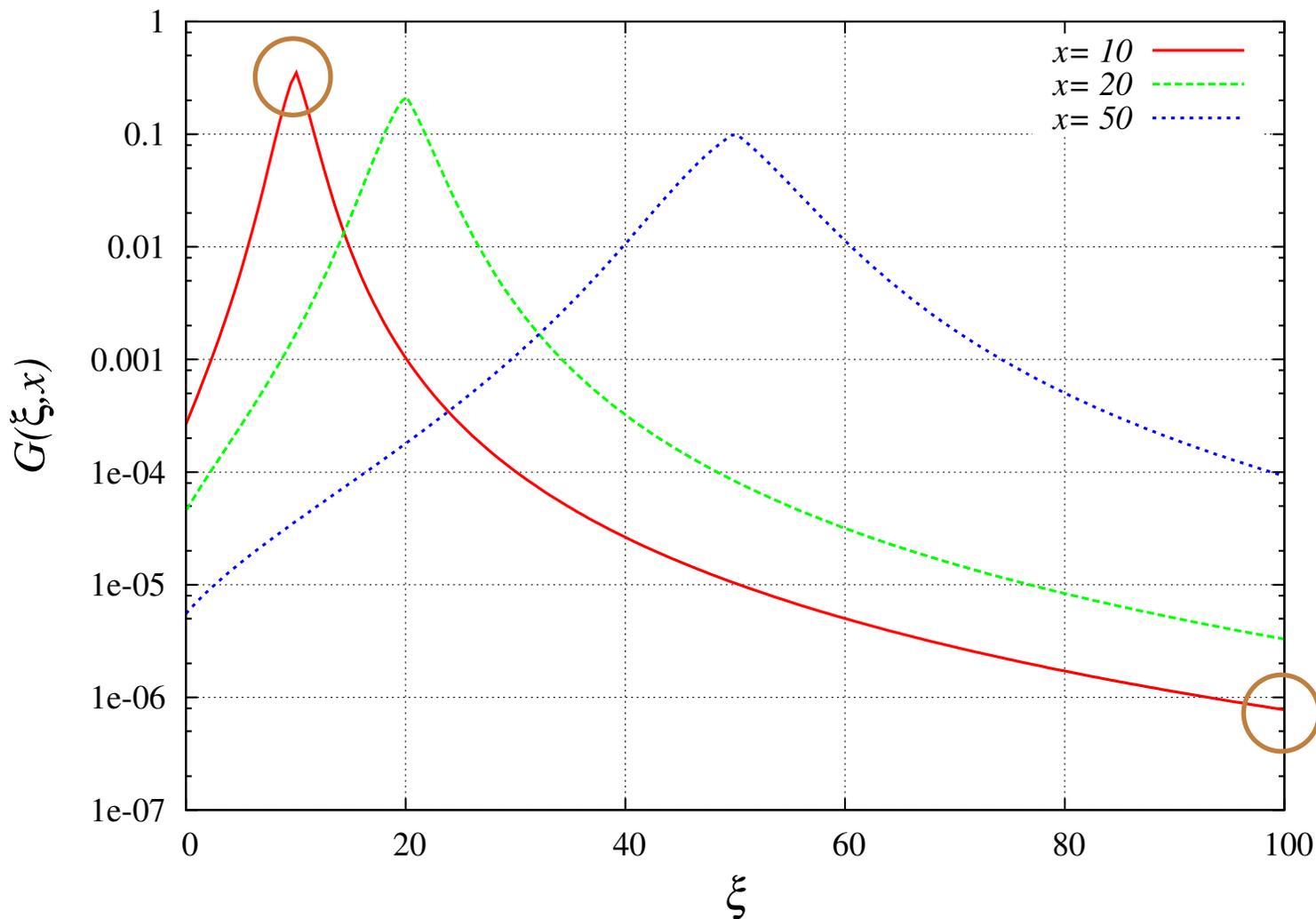
# 核 $G(\xi, x)$

- ❖ 研究目的
- ❖ テーパー管の形状
- ❖ 座標軸と模式図
- ❖ 微小面要素
- ❖ 積分方程式
- ❖ 具体的な関数
- ❖ 核  $G(\xi, x)$**
- ❖ 数値ライブラリ
- ❖ 解  $q(x)$  の様子
- ❖ 解  $q(x)$  の様子
- ❖ 通過確率  $K$
- ❖ 結果の比較
- ❖ まとめ
- ❖ Knudsen 積分公式による近似式
- ❖ 近似式のパラメータ依存性
- ❖ 近似式と数値計算結果の比較



# 核 $G(\xi, x)$

- ❖ 研究目的
- ❖ テーパー管の形状
- ❖ 座標軸と模式図
- ❖ 微小面要素
- ❖ 積分方程式
- ❖ 具体的な関数
- ❖ 核  $G(\xi, x)$**
- ❖ 数値ライブラリ
- ❖ 解  $q(x)$  の様子
- ❖ 解  $q(x)$  の様子
- ❖ 通過確率  $K$
- ❖ 結果の比較
- ❖ まとめ
- ❖ Knudsen 積分公式による近似式
- ❖ 近似式のパラメータ依存性
- ❖ 近似式と数値計算結果の比較



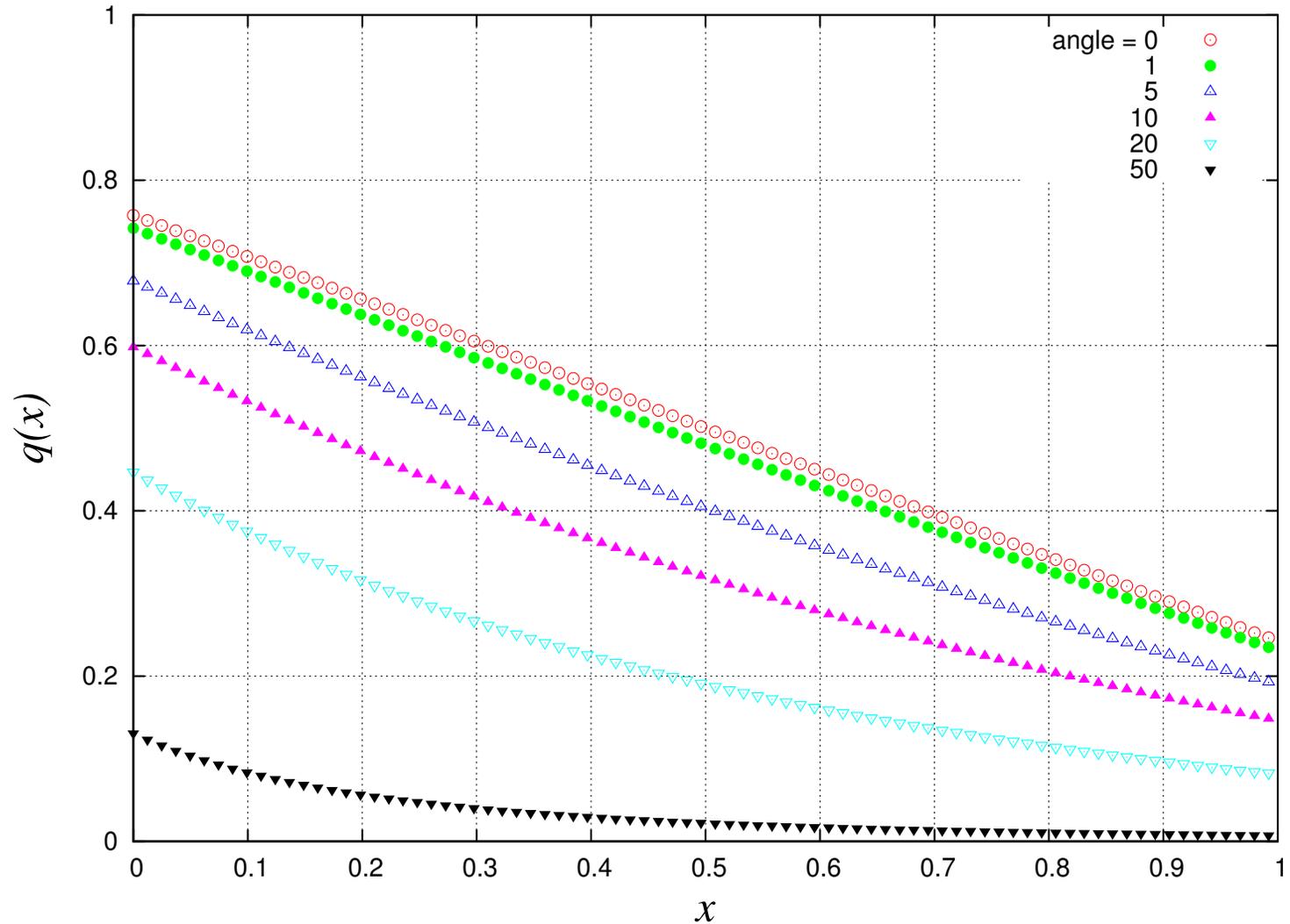
# 信頼できる数値計算ライブラリの活用

- ❖ 研究目的
- ❖ テーパー管の形状
- ❖ 座標軸と模式図
- ❖ 微小面要素
- ❖ 積分方程式
- ❖ 具体的な関数
- ❖ 核  $G(\xi, x)$
- ❖ **数値ライブラリ**
- ❖ 解  $q(x)$  の様子
- ❖ 解  $q(x)$  の様子
- ❖ 通過確率  $K$
- ❖ 結果の比較
- ❖ まとめ
- ❖ Knudsen 積分公式による近似式
- ❖ 近似式のパラメータ依存性
- ❖ 近似式と数値計算結果の比較

- 短い場合には著者等が作成したプログラムでも可能。
- 長い場合には，精度保証が得られない。
- 1次元の積分方程式の解法が，Fortranの科学技術計算用のライブラリにある。
  - ◆ RFRDH1 in libmathlib.a at CERNLIB
  - ◆ Module 503 in TOMS at NETLIB

# 解 $q(x)$ の様子

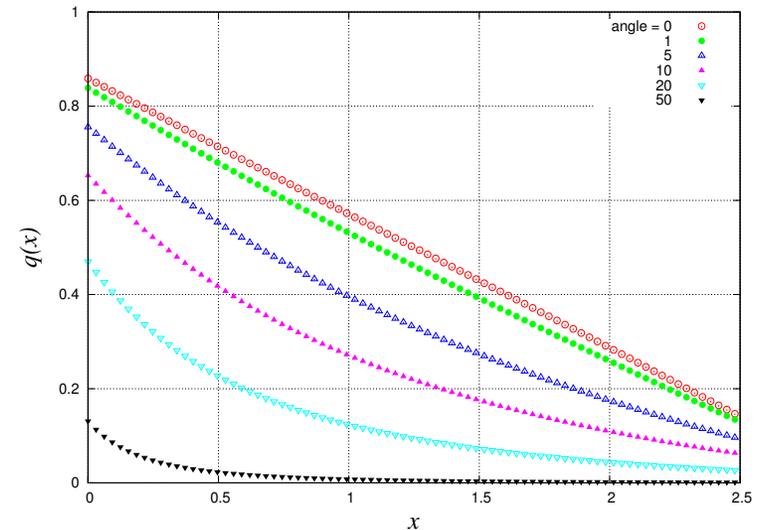
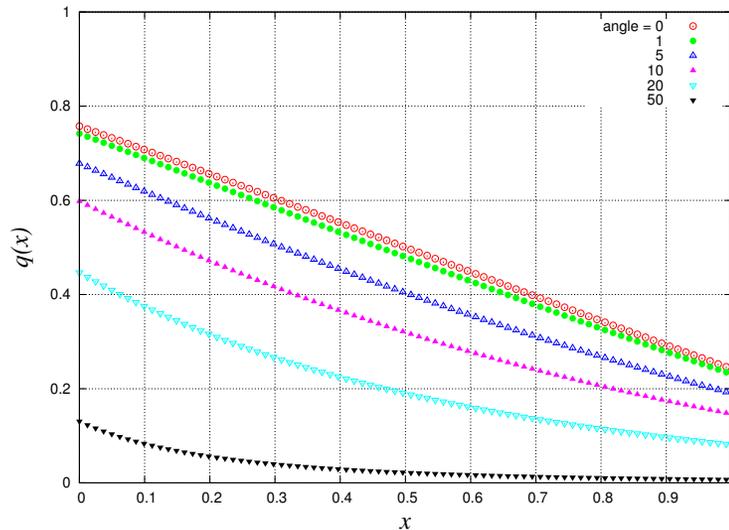
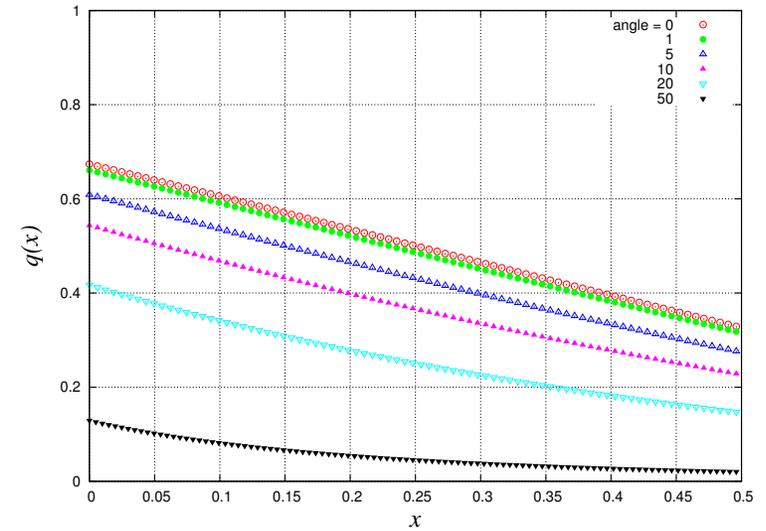
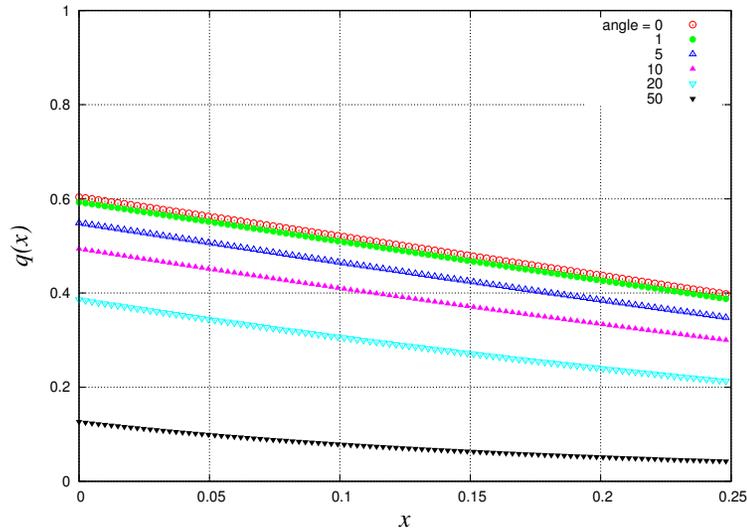
- ❖ 研究目的
- ❖ テーパー管の形状
- ❖ 座標軸と模式図
- ❖ 微小面要素
- ❖ 積分方程式
- ❖ 具体的な関数
- ❖ 核  $G(\xi, x)$
- ❖ 数値ライブラリ
- ❖ 解  $q(x)$  の様子**
- ❖ 解  $q(x)$  の様子
- ❖ 通過確率  $K$
- ❖ 結果の比較
- ❖ まとめ
- ❖ Knudsen 積分公式による近似式
- ❖ 近似式のパラメータ依存性
- ❖ 近似式と数値計算結果の比較



# 解 $q(x)$ の様子

- ❖ 研究目的
- ❖ テーパー管の形状
- ❖ 座標軸と模式図
- ❖ 微小面要素
- ❖ 積分方程式
- ❖ 具体的な関数
- ❖ 核  $G(\xi, x)$
- ❖ 数値ライブラリ
- ❖ 解  $q(x)$  の様子
- ❖ 解  $q(x)$  の様子

- ❖ 通過確率  $K$
- ❖ 結果の比較
- ❖ まとめ
- ❖ Knudsen 積分公式による近似式
- ❖ 近似式のパラメータ依存性
- ❖ 近似式と数値計算結果の比較



左上から  $L/R_0 = 0.5, 1, 2, 5$

# 通過確率 $K$ の計算

得られた  $q(x)$  を用いて,

$$K = \frac{1}{\pi R_0^2} \int_L^\infty \Gamma^{(\alpha)}(R_0, x) 2\pi R_x \frac{dx}{\cos \alpha} + \frac{1}{\pi R_0^2} \int_0^L q(x) \Gamma_w^{(\alpha)}(R_1, L-x) 2\pi R_x \frac{dx}{\cos \alpha} \quad (5)$$

$$= K_o^{(\alpha)} + K_w^{(\alpha)} \quad (6)$$

$$K_o^{(\alpha)} = \frac{1}{2R_0^2} \left[ R_1^2 + R_0^2 + L^2 - \sqrt{(R_0^2 + L^2 + R_1^2)^2 - 4R_0^2 R_1^2} \right] \quad (7)$$

- ❖ 研究目的
- ❖ テーパー管の形状
- ❖ 座標軸と模式図
- ❖ 微小面要素
- ❖ 積分方程式
- ❖ 具体的な関数
- ❖ 核  $G(\xi, x)$
- ❖ 数値ライブラリ
- ❖ 解  $q(x)$  の様子
- ❖ 解  $q(x)$  の様子
- ❖ 通過確率  $K$
- ❖ 結果の比較
- ❖ まとめ
- ❖ Knudsen 積分公式による近似式
- ❖ 近似式のパラメータ依存性
- ❖ 近似式と数値計算結果の比較

# 数値計算結果同士の比較

- ❖ 研究目的
- ❖ テーパー管の形状
- ❖ 座標軸と模式図
- ❖ 微小面要素
- ❖ 積分方程式
- ❖ 具体的な関数
- ❖ 核  $G(\xi, x)$
- ❖ 数値ライブラリ
- ❖ 解  $q(x)$  の様子
- ❖ 解  $q(x)$  の様子
- ❖ 通過確率  $K$
- ❖ 結果の比較
- ❖ まとめ
- ❖ Knudsen 積分公式による近似式
- ❖ 近似式のパラメータ依存性
- ❖ 近似式と数値計算結果の比較

$\alpha$		$L/R_0$				
		0.1	0.2	...	5	10
1	* IE	0.9540787	0.9124899	...	0.3459949	0.2368316
	* MC	0.9540780	0.9124897	...	0.3459974	0.2368326
	IE	0.9540787	0.9124899	...	0.3459949	0.2368317
	MC	0.954077	0.912474	...	0.345922	0.236882
5	* IE	0.9603735	0.9247630	...	0.4786465	<b>0.4086013</b>
	* MC	0.9603720	0.9247632	...	0.4786462	<b>0.4086031</b>
	IE	0.9603735	0.9247630	...	0.4786465	<b>0.4086013</b>
	MC	0.960395	0.924765	...	0.478609	<b>0.408609</b>

\*IE, \*MC は Lobo, J.Vac.Sci.Technol. A21(4),1452(2003) の報告値

# まとめ

- **積分方程式法 (IE) とモンテカルロシミュレーション法 (MC) により, テーパー管の分子流コンダクタンスを計算した.**

- ❖ 研究目的
- ❖ テーパー管の形状
- ❖ 座標軸と模式図
- ❖ 微小面要素
- ❖ 積分方程式
- ❖ 具体的な関数
- ❖ 核  $G(\xi, x)$
- ❖ 数値ライブラリ
- ❖ 解  $q(x)$  の様子
- ❖ 解  $q(x)$  の様子
- ❖ 通過確率  $K$
- ❖ 結果の比較
- ❖ **まとめ**
- ❖ Knudsen 積分公式による近似式
- ❖ 近似式のパラメータ依存性
- ❖ 近似式と数値計算結果の比較

# まとめ

- ❖ 研究目的
- ❖ テーパー管の形状
- ❖ 座標軸と模式図
- ❖ 微小面要素
- ❖ 積分方程式
- ❖ 具体的な関数
- ❖ 核  $G(\xi, x)$
- ❖ 数値ライブラリ
- ❖ 解  $q(x)$  の様子
- ❖ 解  $q(x)$  の様子
- ❖ 通過確率  $K$
- ❖ 結果の比較
- ❖ **まとめ**
- ❖ Knudsen 積分公式による近似式
- ❖ 近似式のパラメータ依存性
- ❖ 近似式と数値計算結果の比較

- 積分方程式法 (IE) とモンテカルロシミュレーション法 (MC) により, テーパー管の分子流コンダクタンスを計算した.
- Lobo の報告には直接掲載されてなかった, 積分方程式の核関数  $G(\xi, x)$  を明示した.

# まとめ

- ❖ 研究目的
- ❖ テーパー管の形状
- ❖ 座標軸と模式図
- ❖ 微小面要素
- ❖ 積分方程式
- ❖ 具体的な関数
- ❖ 核  $G(\xi, x)$
- ❖ 数値ライブラリ
- ❖ 解  $q(x)$  の様子
- ❖ 解  $q(x)$  の様子
- ❖ 通過確率  $K$
- ❖ 結果の比較
- ❖ **まとめ**
- ❖ Knudsen 積分公式による近似式
- ❖ 近似式のパラメータ依存性
- ❖ 近似式と数値計算結果の比較

- 積分方程式法 (IE) とモンテカルロシミュレーション法 (MC) により, テーパー管の分子流コンダクタンスを計算した.
- Lobo の報告には直接掲載されてなかった, 積分方程式の核関数  $G(\xi, x)$  を明示した.
- IE 法と MC 法による **数値計算結果は互いに良**  
**く一致**し, Lobo 等の報告例とも一致した.

# まとめ

- ❖ 研究目的
- ❖ テーパー管の形状
- ❖ 座標軸と模式図
- ❖ 微小面要素
- ❖ 積分方程式
- ❖ 具体的な関数
- ❖ 核  $G(\xi, x)$
- ❖ 数値ライブラリ
- ❖ 解  $q(x)$  の様子
- ❖ 解  $q(x)$  の様子
- ❖ 通過確率  $K$
- ❖ 結果の比較
- ❖ **まとめ**
- ❖ Knudsen 積分公式による近似式
- ❖ 近似式のパラメータ依存性
- ❖ 近似式と数値計算結果の比較

- 積分方程式法 (IE) とモンテカルロシミュレーション法 (MC) により, テーパー管の分子流コンダクタンスを計算した.
- Lobo の報告には直接掲載されてなかった, 積分方程式の核関数  $G(\xi, x)$  を明示した.
- IE 法と MC 法による **数値計算結果は互いに良**  
**く一致**し, Lobo 等の報告例とも一致した.
- 精度はほぼ同じ計算実行時間内で, MC が 5  
桁, IE が 7 桁程度であり,  
**IE 法の効率が飛躍的に高い**.

# Knudsen 積分公式による近似式

- ❖ 研究目的
- ❖ テーパー管の形状
- ❖ 座標軸と模式図
- ❖ 微小面要素
- ❖ 積分方程式
- ❖ 具体的な関数
- ❖ 核  $G(\xi, x)$
- ❖ 数値ライブラリ
- ❖ 解  $q(x)$  の様子
- ❖ 解  $q(x)$  の様子
- ❖ 通過確率  $K$
- ❖ 結果の比較
- ❖ まとめ

## ❖ Knudsen 積分公式による近似式

- ❖ 近似式のパラメータ依存性
- ❖ 近似式と数値計算結果の比較

## ● 一様断面を持つ長い管の分子流コンダクタンス

$$C = \frac{16}{3} \hat{C}_0 \int_0^L \frac{B}{A^2} dl \quad (8)$$

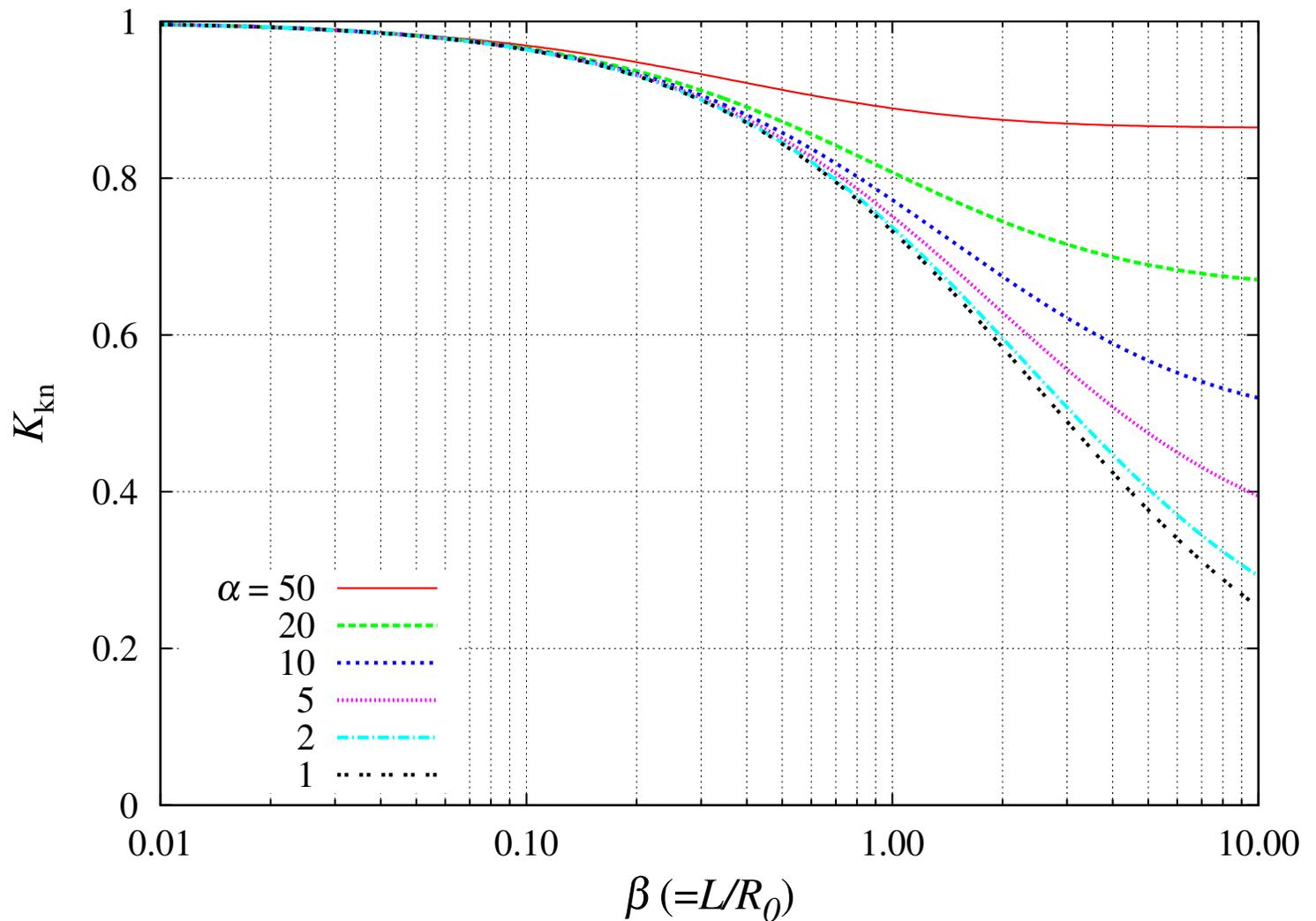
$$C_1 = \frac{16}{3} \hat{C}_0 \cdot \frac{\pi R_1^2 R_0^2}{(R_1 + R_0)L} \quad (9)$$

## ● 短管補正

$$\frac{1}{C_{\text{短}}} = \frac{1}{\hat{C}_0 \pi R_0^2} + \frac{1}{C_1} \quad (10)$$

# 近似式のパラメータ依存性

- ❖ 研究目的
- ❖ テーパー管の形状
- ❖ 座標軸と模式図
- ❖ 微小面要素
- ❖ 積分方程式
- ❖ 具体的な関数
- ❖ 核  $G(\xi, x)$
- ❖ 数値ライブラリ
- ❖ 解  $q(x)$  の様子
- ❖ 解  $q(x)$  の様子
- ❖ 通過確率  $K$
- ❖ 結果の比較
- ❖ まとめ
- ❖ Knudsen 積分公式による近似式
- ❖ 近似式のパラメータ依存性
- ❖ 近似式と数値計算結果の比較



# 近似式と数値計算結果の比較

- ❖ 研究目的
- ❖ テーパー管の形状
- ❖ 座標軸と模式図
- ❖ 微小面要素
- ❖ 積分方程式
- ❖ 具体的な関数
- ❖ 核  $G(\xi, x)$
- ❖ 数値ライブラリ
- ❖ 解  $q(x)$  の様子
- ❖ 解  $q(x)$  の様子
- ❖ 通過確率  $K$
- ❖ 結果の比較
- ❖ まとめ
- ❖ Knudsen 積分公式による近似式
- ❖ 近似式のパラメータ依存性
- ❖ 近似式と数値計算結果の比較

